

Priprave na MMO 2026 – 4. domača naloga

1. Določi vse funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere je

$$f(y^2 f(x)) = xyf(y)$$

za vsa realna števila x in y .

2. Določi vse funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere je

$$f(x^2 - y) + 4yf(x) = f(y - 3f(x))$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Določi vse strogo naraščajoče funkcije $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, za katere

$$f(m) \cdot f(n) \quad \text{deli} \quad (1 + 2m)f(n) + (1 + 2n)f(m)$$

za vsa naravna števila m in n .

Opomba: Funkcija $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je strogo naraščajoča, če za vsa naravna števila n velja $f(n+1) > f(n)$.

4. Določi vse funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere je

$$f(x + yf(x)) + f(xy) = f(x) + f(2025y)$$

za vsa realna števila x in y .

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **28. 12. 2025** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Zadeva elektronskega sporočila naj vsebuje niz »4. domača naloga«, nalogo pa oddajte v eni pdf datoteki.

Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani/a

ime in priimek
samostojno in brez pomoči drugih oseb.

izjavljam, da sem vse naloge reševal/a

Podpis:

kraj in datum

Rešitve

1. Najprej s substitucijo $y \rightarrow 0$ ugotovimo, da velja $f(0) = 0$. Opazimo, da je $f(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ rešitev enačbe. V nadaljevanju analizirajmo preostale rešitve – predpostavimo lahko obstoj realnega števila c , za katerega velja $f(c) \neq 0$. Posebej, ker je $f(0) = 0$, velja $c \neq 0$.

Pokažimo, da je f injektivna funkcija. Predpostavimo, da za realni števili a in b velja $f(a) = f(b)$. Če v enačbo vstavimo $x \rightarrow a$ oziroma $x \rightarrow b$ in dobljeni enačbi primerjamo, dobimo

$$ayf(y) = f(y^2f(a)) = f(y^2f(b)) = byf(y),$$

torej je $ayf(y) = byf(y)$ za vsak $y \in \mathbb{R}$. Posebej velja tudi $acf(c) = bcf(c)$. Ker je $c \neq 0$ in $f(c) \neq 0$, tako sledi $a = b$. Sledi, da je f injektivna funkcija.

Sedaj za neko neničelno realno število x v začetno enačbo vstavimo $y \rightarrow \frac{1}{x}$. Dobimo

$$f\left(\frac{1}{x^2} \cdot f(x)\right) = x \cdot \frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Z uporabo injektivnosti tako dobimo

$$\frac{1}{x^2} \cdot f(x) = \frac{1}{x},$$

oziroma $f(x) = x$. Ta enakost velja za vsa neničelna števila x . Ker pa smo že na začetku ugotovili, da je $f(0) = 0$, ta predpis velja za vse $x \in \mathbb{R}$. Ni težko videti, da je to res rešitev začetne enačbe. Edini rešitvi sta tako

$$\boxed{f(x) = 0 \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}} \quad \text{in} \quad \boxed{f(x) = x \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}}.$$

2. V začetno enačbo vstavimo $y \rightarrow \frac{x^2+3f(x)}{2}$ in dobimo

$$f\left(\frac{x^2-3f(x)}{2}\right) + 4 \cdot \frac{x^2+3f(x)}{2} \cdot f(x) = f\left(\frac{x^2-3f(x)}{2}\right),$$

oziroma

$$2 \cdot (x^2 + 3f(x)) \cdot f(x) = 0$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$. Za vsako realno število x torej velja $f(x) = 0$ ali $f(x) = -\frac{x^2}{3}$.

Predpostavimo, da za neničelni realni števili a in b velja $f(a) = 0$ in $f(b) = -\frac{b^2}{3}$. Opazimo, da lahko vsaj eno izmed teh dveh spremenljivk izberemo na neskončno mnogo načinov. Sedaj v začetno enačbo vstavimo $x \rightarrow a$ in $y \rightarrow b$. Sledi

$$f(a^2 - b) + 4b \cdot 0 = f(b - 3 \cdot 0),$$

oziroma $f(a^2 - b) = -\frac{b^2}{3}$. Sedaj ločimo dva primera:

- i) Velja $f(a^2 - b) = 0$. V tem primeru sledi $0 = -\frac{b^2}{3}$, oziroma $b = 0$, kar je seveda protislovje.

ii) Velja $f(a^2 - b) = -\frac{(a^2 - b)^2}{3}$. V tem primeru se enačba poenostavi v

$$a^4 - 2a^2b + b^2 = b^2,$$

oziroma $a^2 \cdot (a^2 - 2b) = 0$. Ker je $a \neq 0$, tako dobimo $a^2 = 2b$. Ta enakost ne more biti izpolnjena za vse pare števil a in b , ki izpolnjujejo zgornje pogoje – vsaj enega izmed njiju si lahko namreč izberemo na neskončno mnogo načinov.

Preostaneta nam samo dve rešitvi, to sta

$$\boxed{f(x) = 0 \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}} \quad \text{in} \quad \boxed{f(x) = -\frac{x^2}{3} \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Prva očitno reši enačbo, za drugo pa naredimo preizkus. Velja

$$f(x^2 - y) + 4yf(x) = -\frac{(x^2 - y)^2}{3} - 4y \cdot \frac{x^2}{3} = \frac{-x^4 - 2x^2y - y^2}{3}$$

in

$$f(y - 3f(x)) = f(y + x^2) = \frac{-y^2 - 2yx^2 - x^4}{3},$$

kar je res enako.

3. Iz relacije sledi, da

$$f(1)^2 \mid 6f(1),$$

oziroma $f(1) \mid 6$. Sedaj ločimo štiri primere:

i) Velja $f(1) = 1$. Iz podane deljivosti sledi še

$$f(1) \cdot f(2) \mid 3f(2) + 5f(1),$$

kar je ekvivalentno $f(2) \mid 5$. Ker je $f(2) > 1$, dobimo $f(2) = 5$.

Z indukcijo pokažimo, da velja $f(m) = 2m + 1$ za vse $m > 1$. Trditev smo že dokazali za $m = 2$. Predpostavimo, da je $f(m - 1) = 2m - 1$. Ker velja

$$f(1) \cdot f(m) \mid 3f(m) + (2m + 1)f(1),$$

sledi $f(m) \mid 2m + 1$. Ker je f strogo naraščajoča, mora veljati še $f(m) \geq 2m$. Ker $2m \nmid 2m + 1$, je edina preostala možnost res $f(m) = 2m + 1$. Dobimo prvo rešitev

$$f(m) = \begin{cases} 1, & m = 1, \\ 2m + 1, & m > 1. \end{cases}$$

Ta funkcija res zadošča pogojem, saj velja $f(1)^2 \mid 6f(1)$, za $m, n > 1$ pa še

$$f(1) \cdot f(n) = 2n + 1 \mid 3 \cdot (2n + 1) + (2n + 1) \cdot 1 = (1 + 2 \cdot 1)f(n) + (1 + 2n)f(1)$$

in

$$f(m) \cdot f(n) = (2m + 1)(2n + 1) \mid 2 \cdot (2m + 1)(2n + 1) = (1 + 2m)f(n) + (1 + 2n)f(m).$$

ii) Velja $f(1) = 2$. Velja še

$$f(1) \cdot f(2) \mid 3f(2) + 5f(1),$$

kar je ekvivalentno $2f(2) \mid f(2) + 10$. Posebej, velja $f(2) \mid 10$ in $2 \mid f(2)$. Ker je $f(2) > f(1) = 2$, je edina možnost tako kar $f(2) = 10$.

Podobno kot zgoraj z indukcijo dokažimo, da velja $f(m) = 4m + 2$ za vse $m > 1$. Predpostavimo torej, da velja $f(m - 1) = 4m - 2$. Ker velja

$$f(1) \cdot f(m) \mid 3f(m) + (2m + 1)f(1),$$

dobimo $2f(m) \mid f(m) + 4m + 2$. Posebej, sledi $f(m) \mid 4m + 2$. Zaradi monotonosti vemo še, da velja $f(m) > f(m - 1) = 4m - 2$. Ker je največji pravi delitelj števila $4m + 2$ enak

$$\frac{4m + 2}{2} = 2m + 1 < 4m - 2,$$

je edina možnost tako $f(m) = 4m + 2$. Dobimo rešitev

$$f(m) = \begin{cases} 2, & m = 1, \\ 4m + 2, & m > 1. \end{cases}$$

S podobnim izračunom kot pri prvem primeru se lahko prepričamo, da ta funkcija res izpolnjuje pogoj deljivosti.

iii) Velja $f(1) = 3$. Podobno kot v prvem primeru dobimo $f(2) \mid 5$, od koder sledi $f(2) = 5$. Ker mora veljati

$$f(1) \cdot f(m) \mid 3f(m) + (2m + 1)f(1),$$

sledi $f(m) \mid f(m) + 2m + 1$, oziroma $f(m) \mid 2m + 1$. Z enako indukcijo kot v prvem primeru tako dobimo $f(m) = 2m + 1$ za vsak $m \in \mathbb{N}$. Jasno je, da je to res rešitev.

iv) Velja $f(1) = 6$. Tako kot v drugem primeru sledi $f(2) \mid 10$, od koder z upoštevanjem $f(2) > f(1) = 6$ dobimo $f(2) = 10$. Ker mora veljati

$$f(1) \cdot f(m) \mid 3f(m) + (2m + 1)f(1),$$

sledi $2f(m) \mid f(m) + 2 \cdot (2m + 1)$, zato velja tudi $f(m) \mid 4m + 2$. Z enako indukcijo kot v drugem primeru dobimo $f(m) = 4m + 2$ za vsak $m \in \mathbb{N}$. Tudi ta funkcija zadošča pogojem naloge.

Vse rešitve so tako

$$\boxed{f(m) = 2m + 1 \text{ za vsak } m \in \mathbb{N}}, \quad \boxed{f(m) = 4m + 2 \text{ za vsak } m \in \mathbb{N}},$$

$$\boxed{f(m) = \begin{cases} 1, & m = 1, \\ 2m + 1, & m > 1 \end{cases}} \quad \text{in} \quad \boxed{f(m) = \begin{cases} 2, & m = 1, \\ 4m + 2, & m > 1. \end{cases}}$$

4. Če velja $f(2025) \neq 0$, s substitucijo $x \rightarrow 2025, y \rightarrow \frac{y-2025}{f(2025)}$ dobimo

$$f(y) = f(2025)$$

za vsak $y \in \mathbb{R}$, kar pomeni, da je f konstantna funkcija. V nadaljevanju analizirajmo nekonstantne funkcije.

Denimo sedaj, da je $f(2025) = 0$. Naj bo a poljubna ničla funkcije f . Substitucija $x \rightarrow a, y \rightarrow \frac{y}{2025}$ nam da

$$f(by) = f(y),$$

kjer je $b = \frac{a}{2025}$. Predpostavimo, da obstaja tak x_0 , da je $f(x_0) \neq 0$. Če primerjamo enačbi, ki ju dobimo s substitucijama $x \rightarrow bx_0, y \rightarrow \frac{y-x_0}{f(x_0)}$ in $x \rightarrow x_0, y \rightarrow \frac{y-x_0}{f(x_0)}$, dobimo

$$f((b-1)x_0 + y) = f(y).$$

Funkcija je torej periodična s periodo $p = (b-1)x_0$. Če je $p \neq 0$, v enačbo vstavimo $x \rightarrow 0, y \rightarrow \frac{y}{p}$ in $x \rightarrow p, y \rightarrow \frac{y}{p}$. S primerjavo teh enačb dobimo

$$f(y) = f(0),$$

torej je f konstantna funkcija, kar je protislovje. Sledi, da je $p = 0$. Od tod sledi, da je $x_0 = 0$, kar pomeni, da je $f(x) = 0$ za vsak $x \neq 0$, ali pa je $b = 1$, kar pomeni, da je 2025 edina ničla funkcije. V prvem primeru dobimo rešitev

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases},$$

v drugem pa nam substitucija $y \rightarrow 1$ da

$$f(x) = 2025 - x.$$

Vse rešitve so tako

$$\boxed{f(x) = c \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}}, \quad \boxed{f(x) = 2025 - x \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}} \quad \text{in} \quad \boxed{f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ c, & x = 0. \end{cases}}$$

Ni težko preveriti, da konstantne funkcije in $f(x) = 2025 - x$ rešijo enačbo. Naredimo preizkus še za zadnjo družino funkcij. Predpostavimo lahko $c \neq 0$, saj je sicer rešitev konstantna. Če je $x = 0$, dobimo

$$f(0 + yc) + c = c + f(2025y),$$

kar je ekvivalentno $f(cy) = f(2025y)$. Če je $y = 0$, sta obe strani enaki c , sicer pa sta obe enaki 0, torej je enakost v tem primeru izpolnjena. Če je $y \neq 0$, je začetna enačba ekvivalentna

$$f(x) + c = f(x) + c,$$

kar očitno drži. Če pa sta tako x kot y različna od 0, prav tako dobimo

$$f(x + yf(x)) + f(xy) = f(x + 0) + 0 = f(x) + f(2025y).$$

V vseh primerih je torej enakost izpolnjena, zato funkcije take oblike res izpolnjujejo pogoj naloge.